



سروش هدایت

نام آزمون: حسابان ۱۱ ریاضی

تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۰۹/۲۶

۸۱- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $y = x + 1$ و $2x - 2y = 3$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

۴) $\frac{25}{4}$

۳) $\frac{25}{8}$

۲) $\frac{9}{4}$

۱) $\frac{9}{8}$

۸۲- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

۴) ۷٫۵

۳) ۷

۲) ۶٫۵

۱) ۶

۸۳- به ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a, 3)$ و $(4a + 1, 6)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می گیرند؟

۴) $2, -\frac{9}{4}$

۳) $-2, -\frac{3}{4}$

۲) $-2, \frac{3}{4}$

۱) $-2, \frac{9}{4}$

۸۴- تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2-ax+b}$ مفروض است. اگر دامنه آن برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۴) ۱

۳) ۲

۲) ۳

۱) ۴

۸۵- مجموع طول پاره خطهای نمودار تابع $y = x[x]$ وقتی $-1 \leq x \leq 1$ کدام است؟

۴) ۱

۳) $2\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{2} + 1$

۱) ۲

۸۶- معادله $x^2 - 6 = x$ چند جواب دارد؟

۴) بی شمار

۳) ۰

۲) ۱

۱) ۲

۸۷- دامنه ی تابع $y = \frac{x-1}{[x] + [-x]}$ برابر کدام مجموعه است؟

۴) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

۳) \mathbb{Z}

۲) \mathbb{R}

۱) \emptyset

۸۸- به ازای چند مقدار m رابطه $f = \{(2, m^3 - m), (3, m + 1), (m, 2), (2, 0), (m^2, 2m)\}$ تابعی یک به یک است؟

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

۸۹- اگر $11 < |2x - 3|$ باشد، $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ چند مقدار خواهد داشت؟ ($\lfloor \cdot \rfloor$ نماد جزء صحیح است.)

۴) ۵

۳) ۴

۲) ۶

۱) ۳

۹۰- دامنه ی تابع $f(x) = \frac{x}{2[x] + 3}$ کدام است؟

۴) $\mathbb{R} - \{-1\}$

۳) \mathbb{R}

۲) $\mathbb{R} - [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$

۱) $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$



پاسخنامه تشریحی

۸۱ - گزینه ۳

شیب هر دو خط یک می باشند یعنی این دو خط موازیند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله ی بین این دو، ضلع مربع را می دهد.

$$\begin{array}{c} x - y + 1 = 0 \\ \hline \square \\ \hline x - y - \frac{3}{2} = 0 \end{array}$$

(در محاسبه ی فاصله ی بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله ی خط باید یکسان باشند)

$$\begin{aligned} \text{ضلع مربع} = d &= \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ S_{\text{مربع}} &= (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

برای محاسبه ی فاصله ی بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می کنیم.

۸۲ - گزینه ۲ روش اول: هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| \\ &= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6,5 \end{aligned}$$

روش دوم: ابتدا طول یکی از اضلاع مانند BC را به دست می آوریم و آن را به عنوان قاعده ی مثلث در نظر می گیریم. سپس با پیدا کردن معادله ی ضلع BC فاصله ی A را تا این خط پیدا می کنیم تا ارتفاع مثلث (AH) معلوم شود و در نهایت مساحت مثلث به دست آید.

$$\begin{aligned} B(3, 0), C(0, 2) \quad m_{BC} &= \frac{2 - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3} \\ BC \text{ معادله خط } y - 0 &= -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{2}{3}x - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AH &= \frac{|\frac{2}{3} + (\frac{2}{3} \times 2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3})^2}} = \frac{|\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2|}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{|\frac{13}{3} - 2|}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \sqrt{13} \\ BC &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6,5$$

۸۳ - گزینه ۴

سه نقطه ی $A \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 6 \\ 4a + 1 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ را در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} \text{شرط هم راستا بودن: } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} &= \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow \frac{3 - 4a - 1}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6 - 0} \Rightarrow \frac{2 - 4a}{a - 6} = \frac{4a + 1}{6} \\ \rightarrow 4a^2 + a - 24a - 6 &= 12 - 24a \rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0 \\ \rightarrow \Delta = 1 - 4(4)(-18) &= 289 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 17}{8} = 2, -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

۸۴ - گزینه ۲ عدد ۱ ریشه ی مخرج است و مخرج ریشه ی دیگری ندارد. پس مخرج به صورت $(x - 1)^2$ است.

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 - ax + b \Rightarrow a = 2, b = 1$$

پس $a + b = 3$ است.

۸۵ - گزینه ۲

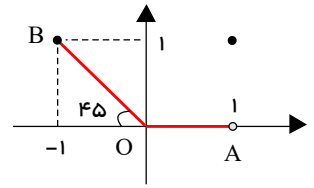
با تعیین علامت کردن عبارت براکتی و رسم تابع، می توان طول پاره خط را حساب نمود.



$$y = x[x] = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$OA = 1$$

$$OB^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow OB = \sqrt{2} \Rightarrow OA + OB = \sqrt{2} + 1$$



۸۶ - گزینه ۱

چون عبارت سمت چپ همواره صحیح است، پس عبارت سمت راست هم باید صحیح باشد. بنابراین x و x^2 هر دو صحیح هستند.

$$\begin{aligned} [x^2] - 6 &= x \xrightarrow{[x^2]=x^2} x^2 - 6 = x \Rightarrow x^2 - 6 - x = 0 \\ \Rightarrow (x - 3)(x + 2) &= 0 \Rightarrow x = 3, -2 \end{aligned}$$

۸۷ - گزینه ۴ میدانیم $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$ و دامنه‌ی تابع کسری برابر است با $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$. بنابراین داریم:

$$[x] + [-x] \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

۸۸ - گزینه ۴ برای اینکه f تابع باشد باید:

$$\begin{cases} (2, m^3 - m) \in f \\ (2, 0) \in f \end{cases} \Rightarrow m^3 - m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = \pm 1$$

اگر $m = 0$ آن‌گاه:

$$f, f = \{(2, 0), (3, 1), (0, 2), (0, 0)\}$$

اگر $m = 1$ آن‌گاه:

$$f, f = \{(2, 0), (3, 2), (1, 2)\}$$

اگر $m = -1$ آن‌گاه:

$$f, f = \{(2, 0), (3, 0), (-1, 2), (1, -2)\}$$

پس هیچ مقدار m ای وجود ندارد که f تابعی یک به یک باشد.

۸۹ - گزینه ۴

$$|2x - 3| < 11 \Rightarrow -11 < 2x - 3 < 11 \Rightarrow -8 < 2x < 14$$

$$-4 < x < 7 \Rightarrow \frac{-4}{3} < \frac{x}{3} < \frac{7}{3} \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -2, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow \text{مقدار } 5$$

۹۰ - گزینه ۳

$$2[x] + 3 = 0 \rightarrow [x] = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \Rightarrow \text{مخرج صفر نمی‌شود}$$

پاسخنامه کلیدی

۸۱ - ۳

۸۳ - ۴

۸۵ - ۲

۸۷ - ۴

۸۹ - ۴

۸۲ - ۲

۸۴ - ۲

۸۶ - ۱

۸۸ - ۴

۹۰ - ۳